CHAPITRE II

ESPACES VECTORIELS

Table des matières

ECG 2 Maths appliquées, http://louismerlin.fr.

1. Structure d'espace vectoriel.

Un espace vectoriel est un objet mathématique abstrait dont la définition est difficile à appréhender. Nous allons partir du concept général (qui est au programme mais qui n'a jamais été utilisé dans des sujets de concours) puis en montrer certains exemples, sur lesquels nous nous appuierons dans la suite de ce cours. Ce sont ces exemples qu'il faut avoir compris en priorité.

De manière heuristique, un espace vectoriel est un ensemble dans lequel on peut faire certains calculs. Les calculs obéissent à des règles qui donnent à l'ensemble sa *structure*. Pour fabriquer une règle de calcul (que l'on appelle classiquement "loi de composition"), il s'agit de décider comment à partir de deux éléments de l'ensemble, on en fabrique un troisième (ce troisième élément est le résultat du calcul). Bien qu'il existe des exemples très divers (et intéressants) de lois de composition, l'archétype reste l'addition et la multiplication des nombres réels, qui nous permettront de construire nos exemples privilégiés.

La structure d'espace vectoriel n'est que l'une des différentes structures mathématiques. L'étude de ces structures participent d'un grand courant de pensée du XXème qui dépasse largement le cadre des maths : le structuralisme. Il existe en effet des théories structuralistes en linguistique, en philosophie, en psychanalyse, en anthropologie, et même en littérature ou dans les arts. Le point commun de chacune des branches de la théorie consiste à penser les objets d'étude, non pas dans leur singularité et leur existence autonome, mais plutôt à les analyser compte tenu des relations qui les unissent. Dans notre version mathématiques, il va s'agir ici aussi de regarder nos objets (qu'on appelle ici des vecteurs) dans leur ensemble. Nous étudierons donc des (gros) ensembles de vecteurs (les espaces vectoriels), qui nous permettront de comprendre quelles relations ils peuvent éventuellement avoir entre eux, et nous n'accorderons pas vraiment d'importance à la spécificité de chaque vecteur ; tout ceci dans l'esprit de la théorie générale.

1.1. **Définition.**

Définition : Loi de composition interne.

Soit E un ensemble. Une **loi de composition interne** dans E est une application qui, à deux éléments de E, associe un autre élément appartenant à E. Autrement dit, il s'agit d'une application définie sur $E \times E$ à valeurs dans E.

Exemple 1.1.1.

- L'addition est une loi de composition interne sur l'ensemble des entiers naturels.
- La soustraction n'est pas une loi de composition interne sur l'ensemble des entiers naturels.

Définition : Loi de composition externe.

Soit E un ensemble. Une **loi de composition externe** à opérateurs dans $\mathbb{R}$ est une application de $\mathbb{R} \times E$ dans E. Un nombre réel est, dans ce contexte, appelé aussi un **scalaire**.

Exemple 1.1.2. Soit f une fonction et λ un réel, l'écriture $\lambda.f$ désigne la fonction définie par

$$(\lambda.f)(x) = \lambda f(x).$$

Cela définit donc une loi de composition externe sur l'ensemble des fonctions.

Définition : $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne notée $+$ et d'une loi de composition externe à opérateurs dans $\mathbb{R}$ notée $\cdot$. On dit que $(E, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel lorsque les propriétés suivantes sont vérifiées :

- Pour la loi de composition interne $+$:
  - **A** $\forall (u, v, w) \in E^3$, $(u + v) + w = u + (v + w)$. On dit que la loi $+$ est associative.

N Il existe dans E un élément neutre pour l'addition, noté 0_E, c'est-à-dire tel que pour tout $u \in E$,

$$u + 0_E = 0_E + u = u.$$

S $\forall u \in E$, il existe un élément v de E, appelé opposé de u tel que $u + v = v + u = 0_E$ et on note $v = -u$

C $\forall (u, v) \in E^2$, $u + v = v + u$, la loi $+$ est commutative

- pour la loi de composition externe . :

A Le produit est compatible avec le produit des réels : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall u \in E$, $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \times \mu) \cdot u$

N Le réel 1 est un élément neutre pour la loi $\cdot$: pour tout $u \in E$, $1 \cdot u = u$

D La loi $\cdot$ est distributive par rapport à la loi $+$: $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall u, v \in E$,

$$(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u \quad \text{et} \quad \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v.$$

Les éléments de E sont alors appelés **vecteurs**. 0_E est appelé **vecteur nul**.

On déduit de la définition les propriétés suivantes :

Proposition : Produit nul d'un scalaire par un vecteur.

Soit E un espace vectoriel, u un élément de E et λ un réel. Alors :

$$\lambda . u = 0_E \iff (\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad u = 0_E) .$$

Autrement dit, le produit d'un réel λ par un vecteur u est égal au vecteur nul si, et seulement si, le réel λ est nul ou le vecteur u est le vecteur nul.

Démonstration. À compléter. □

Remarque 1.1.3. En particulier, pour tous vecteurs u, v et tous réels λ, μ :

- Si $\lambda = 0$, $\lambda \cdot u = 0 \cdot u = 0_E$: en multipliant un vecteur par zéro, on obtient le vecteur nul.
- Si $u = 0_E$, $\lambda \cdot u = \lambda \cdot 0_E = 0_E$: les multiples du vecteur nul sont égaux au vecteur nul.
- $\lambda \cdot u = \lambda \cdot v$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $u = v$.
- $\lambda \cdot u = \mu \cdot u$ si et seulement si $\lambda = \mu$ ou $u = 0_E$.
- $\lambda \cdot (-u) = (-\lambda) \cdot u = -(\lambda \cdot u)$ noté tout simplement $-\lambda \cdot u$.

Les opérations absentes d'un espace vectoriel concernent les produits (et divisions) de vecteurs : **on ne peut pas multiplier ou diviser des vecteurs entre eux**, sauf cas exceptionnels (produits de matrices, par exemple).

1.2. Exemples fondamentaux d'espaces vectoriels.

Proposition : L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Soit $n \geqslant 1$. Dans l'ensemble des n-uplets de nombre réels $\mathbb{R}^n$, considérons les deux lois interne et externe suivantes :

- l'**addition** de deux n-uplets, définie par :

$$u + v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

(pour tous $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ éléments de $\mathbb{R}^n$)

- la **multiplication d'un n-uplet par un réel** :

$$\lambda \cdot u = \lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

(pour tout $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$).

Alors $\mathbb{R}^n$, muni de ces deux opérations, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Le vecteur nul est le n-uplet nul : $0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Démonstration. À compléter. □

Exemple 1.2.1. Considérons l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^5$. Quel est le vecteur nul de E. Puis soit deux vecteurs $u = (1, 0, 5, -6, 2)$ et $v = (-1, 2, 0, 6, 1)$. Calculer : $u + v$, $-u$, $2u - 3v$.

Proposition : L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Soit $n \geqslant 1$. Dans l'ensemble des matrice-colonnes $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, considérons les deux lois interne et externe suivantes :

- l'**addition** de deux matrice-colonnes, définie par :

$$u + v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

  (pour tous u et v éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$)

- la **multiplication d'une matrice-colonne par un réel** :

$$\lambda \cdot u = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

  (pour tout $u \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$).

Alors $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, muni de ces deux opérations, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Le vecteur nul est la matrice-colonne nulle : $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration. Similaire à $\mathbb{R}^n$. □

Exemple 1.2.2. Considérons l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Soit deux vecteurs $u = X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $v = Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Calculer : $X + Y$, $-X$, $2X - 3Y$ puis donner le vecteur nul de E.

On peut en fait généraliser le résultat précédent à des matrices de tailles quelconques.

Proposition : Les espaces vectoriels de matrices.

Soit n et p deux entiers naturels non nuls, et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels. Considérons les deux lois interne et externe suivantes :

- l'**addition** de deux matrices, définie par :

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1p}+b_{1p} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2p}+b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{np}+b_{np} \end{pmatrix}$$

(pour tous $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant 1\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant 1\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$)

- la **multiplication d'une matrice par un réel** :

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1p} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{np} \end{pmatrix}$$

(pour tout $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq 1\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$).

Alors $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, muni de ces deux opérations, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Le vecteur nul est la matrice nulle : $O_{np} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration. Similaire : on se ramène à $\mathbb{R}$. □

Exemple 1.2.3. Considérons l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Quel est le vecteur nul de E ? Puis soit deux vecteurs $u = A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $v = B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer : $A + B$, $-A$, $2A - 3B$.

Proposition : L'espace vectoriel des suites réelles.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites numériques. Considérons les deux lois interne et externe suivantes :

- l'**addition** de deux suites, définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (u+v)_n = u_n + v_n$$

(pour tous $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ éléments de $\mathcal{S}$)

- la **multiplication d'une suite par un réel** :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (\lambda.u)_n = \lambda u_n$$

(pour tout $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$).

Alors $\mathcal{S}$, muni de ces deux opérations, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Le vecteur nul est la suite constante nulle : $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Similaire : on se ramène à $\mathbb{R}$. □

Exemple 1.2.4. Considérons l'espace vectoriel $E = \mathcal{S}$. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux vecteurs définis par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{1}{n+1}$ et $v_n = \sqrt{n+1}$. Donner l'expression de : $u + v$, $-u$, $2u - 3v$.

Proposition : Les espaces vectoriels de fonctions.

Soit D un domaine de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions numériques définies sur D. Considérons les deux lois interne et externe suivantes :

- l'**addition** de deux fonctions, définie par :

$$\forall x \in D, \qquad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

(pour tous f et g éléments de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$)

- la **multiplication d'une fonction par un réel** :
$$\forall x \in D, \qquad (\lambda.f)(x) = \lambda f(x)$$
(pour tout $f \in \mathcal{F}(D,\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$).

Alors $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$, muni de ces deux opérations, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Le vecteur nul est la fonction constante nulle : $f(x) = 0$ pour tout $x \in D$.

Démonstration. Similaire : on se ramène à $\mathbb{R}$. □

Exemple 1.2.5. Considérons l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}\left(]0,1[,\mathbb{R}\right)$. Soit deux vecteurs $u = f\colon x \mapsto \ln(1-x)$ et $v = g\colon x \mapsto \sqrt{2x+1}$. Montrer que f et g appartiennent à $\mathcal{F}(]0,1[,\mathbb{R})$, puis donner l'expression de : $f+g$, $-f$, $2f-3g$ puis donner le vecteur nul de E.

Proposition : L'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels : $P \in \mathbb{R}[X]$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que
$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$
Considérons les deux lois interne et externe suivantes :

- l'**addition** de deux polynômes, définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (P+Q)(x) = P(x) + Q(x)$$
(pour tous P et Q éléments de $\mathbb{R}[X]$)
- la **multiplication d'un polynôme par un réel** :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (\lambda.P)(x) = \lambda P(x)$$
(pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$).

Alors $\mathbb{R}[X]$, muni de ces deux opérations, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Le vecteur nul est le polynôme nul, c'est-à-dire le polynôme dont tous les coefficients sont nuls.

Démonstration. Similaire : on se ramène à $\mathbb{R}$. □

Exemple 1.2.6. Considérons l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$. Soit deux vecteurs $u = P(x) = 2x^2 + 3x - 1$ et $v = Q(x) = 3x^3 - 2x^2 - x + 2$. Donner l'expression de : $P+Q$, $-P$, $2P-3Q$.

Méthode : Ne jamais utiliser la définition.

On ne demandera JAMAIS de montrer qu'un ensemble muni de deux lois interne et externe est un espace vectoriel en utilisant la définition. On se souviendra que les exemples qui ont été listés sont des espaces vectoriels, et on le redémontrera pas.

1.3. Sous-espace vectoriel.

Définition : Sous-espace vectoriel.

Soit $(E,+,\cdot)$ un espace vectoriel et F une partie de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si $(F,+,\cdot)$ est lui-même un espace vectoriel.

Remarquer qu'il s'agit bien des mêmes lois de composition pour E et pour F.

Proposition : Un sous-espace vectoriel contient nécessairement le vecteur nul.

Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F contient le vecteur nul 0_E de E.

Démonstration. À compléter. □

Remarque 1.3.1. En contraposant, on obtient :
si F ne contient pas le vecteur nul de E, alors F n'est pas un sous-espace vectoriel de E.
Cela permet dans certains cas de vérifier rapidement que l'on n'a pas un sous-espace vectoriel.

Exemple 1.3.2. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x + y - z = 1\}$. F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Proposition : Caractérisation abstraite d'un sous-espace vectoriel.

Soit E un espace vectoriel et F une partie non vide de E. Alors F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si F vérifie est stable par combinaisons linéaires : pour tout $(u, v) \in F^2$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\lambda u + \mu v \in F.$$

Démonstration. À compléter. □

Remarque 1.3.3. Montrer qu'un ensemble F est stable par combinaisons linéaires revient à montrer **deux** propriétés :

- F est stable par addition : pour tout $u, v \in F$, alors $u + v \in F$. **ET**
- F est stable par multiplication par un scalaire : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $u \in F$, alors $\lambda u \in F$.

Remarque 1.3.4. Sans faire la preuve, on constate déjà que si un ensemble non vide est stable par combinaisons linéaires, alors il contient le vecteur nul. En effet, soit u un vecteur de F (F est non vide). Prenons $u = v$ et $\lambda = \mu = 0$ dans la caractérisation précédente. Il vient

$$0u + 0u = 0 \in F.$$

Méthode : Sous-espace vectoriel.

Pour montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel avec la méthode par caractérisation abstraite, il faut :

- établir que F est un sous-ensemble d'un espace vectoriel E de référence,
- montrer que F est non vide (bien souvent il contient le vecteur nul 0_E),
- établir que F est stable par combinaisons linéaires (éventuellement décomposer cette étape en deux sous-étapes : F est stable par addition et par multiplication par un scalaire).

Exemple 1.3.5. Soit F l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille 3. Montrer que F est un espace vectoriel.

Exemple 1.3.6. Soit V l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n$. Montrer que V est un espace vectoriel.

Exemple 1.3.7. Soit C l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$. Montrer que C est un espace vectoriel.

Exemple 1.3.8. Soit T l'ensemble des polynômes de degré 2. T est-il un espace vectoriel ?

Exercice 1.3.9. Parmi les ensembles ci-dessous, quels sont ceux qui sont des espaces vectoriels ?

1. les fonctions paires.
2. les fonctions continues sur $[0; 1]$.
3. les suites géométriques de raison 2.
4. les fonctions croissantes sur $[0; 1]$.
5. les fonctions monotones sur $[0; 1]$.

6. les fonctions positives sur $[0; 1]$.

Exemple 1.3.10.

1. Soit F l'ensemble des quadruplets de réels (x, y, z, t) vérifiant $x - 2y + 3z - 6t = 0$. F est-il un espace vectoriel ?

2. Soit G l'ensemble des quadruplets de réels (x, y, z, t) vérifiant $x - 2y + 3z - 6t^2 = 0$. G est-il un espace vectoriel ?

3. Soit H l'ensemble des quadruplets de réels (x, y, z, t) vérifiant $x - 2y + 3z - 6t = 1$. H est-il un espace vectoriel ?

Proposition : Polynômes de degré au plus n.

Soit $n \geqslant 1$ et notons $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré **au plus** n, c'est-à-dire :

$$P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ si et seulement si } \begin{cases} P \in \mathbb{R}[X] \\ \deg(P) \leqslant n \end{cases}$$

Alors $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, donc lui-même un espace vectoriel.

Démonstration. À compléter □

Proposition : Intersection de deux sous espaces vectoriels.

Soit E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

Notons $V = F \cap G$, l'intersection de F et G : $u \in V$ si et seulement si $\Big(u \in F$ **et** $u \in G\Big)$.

Alors V est un sous-espace vectoriel de E, donc lui-même un espace vectoriel.

Démonstration. À compléter.

□

Exemple 1.3.11. Considérons $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = 2x\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = 2y\}$.

1. Déterminer l'intersection $F \cap G$.

2. La réunion $F \cup G$ est-elle un sous-espace vectoriel ?

2. Familles de vecteurs.

Dans toute cette partie, E désigne un espace vectoriel.

2.1. Combinaisons linéaires et sous-espace vectoriel engendré.

Définition : Combinaisons linéaires et sous-espace vectoriel engendré.

Soit $e_1, e_2, \ldots, e_p, u$ des vecteurs de E. On dit que le vecteur u est une **combinaison linéaire** des vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_p$ si et seulement s'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ tels que :

$$u \quad = \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \quad = \quad \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_p e_p$$

On désigne par $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ l'ensemble de tous les vecteurs de E s'écrivant comme combinaison linéaire des vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_p$, de sorte que

$u \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_p e_p.$$

La définition de sous-espace engendré est soutenue par le théorème suivant.

Théorème : Vect est un sous-espace vectoriel.

Soit $e_1, e_2, \ldots, e_p$ des vecteurs de E. Alors $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ est un sous-espace vectoriel de E. C'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant les vecteurs $e_1, \ldots, e_p$.

Démonstration. À compléter. □

Remarque 2.1.1. Pour $p = 1$, $\mathrm{Vect}(e_1)$ est en fait l'ensemble des multiples λe_1 du vecteur e_1.

Exemple 2.1.2. $u = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire de $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ car

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i.e. $u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ avec $\lambda_1 = 6$ et $\lambda_2 = -5$.

Donc $u \in \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)$ car u s'écrit comme une combinaison linéaire de e_1 et e_2.

2.2. **Familles génératrices.** L'objectif de cette partie est de décrire un espace vectoriel à l'aide d'un nombre limité de vecteurs, les autres étant obtenus comme combinaisons linéaires de ces vecteurs.

Définition : Famille génératrice.

Une famille de vecteurs $\left(e_1, \ldots, e_p\right)$ de E est dite **génératrice** de E si et seulement si $E = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$. Autrement dit, cela signifie que tout vecteur u de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de la famille $\left(e_1, \cdots, e_p\right)$:

$$\forall u \in E, \quad \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \text{ t.q. } u = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p.$$

Méthode : Famille génératrice.

Pour montrer qu'une famille de vecteurs $\left(e_1, \cdots, e_p\right)$ est génératrice d'un espace vectoriel E, on pourra montrer que tout vecteur u de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de cette famille. Cela consistera à résoudre le système $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = u$ d'inconnues $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ à exprimer en fonction de u.

Exemple 2.2.1.

1. Dans $\mathbb{R}^2$ la famille $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$ car tout vecteur u de $\mathbb{R}^2$ s'écrit $u = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = xe_1 + ye_2$.
2. La famille $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ et $e_3 = (2, 3)$ est aussi génératrice : $(x, y) = xe_1 + ye_2 + 0e_3$.

Exemple 2.2.2. Montrer que V est un espace vectoriel et en trouver une famille génératrice dans les cas suivants :

1. $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 4x \\ 3x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$.
2. $V = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ 3\alpha \\ 6\beta - 2\alpha \end{pmatrix}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
3. $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ avec } x - 2t = 0 \text{ et } y + 2z - t = 0\}$.
4. $V = \left\{ \begin{pmatrix} a + b - 2c & a - b \\ c & a + 2c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

Remarque 2.2.3. Soit $\left(e_1, e_2, \cdots, e_p\right)$ une famille génératrice de E. Alors :

- Toute famille obtenue en ajoutant des vecteurs est encore génératrice.

- Si on multiplie un ou plusieurs des vecteurs par un réel **non nul**, alors la famille obtenue est encore génératrice.
- Si l'on ajoute à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres, alors la famille obtenue est encore génératrice.
- Si l'un des vecteurs est le vecteur nul, on peut l'enlever et on conserve une famille génératrice.

Proposition : Appauvrissement d'une famille génératrice.

Soit $e_1, e_2, \cdots, e_p, u$ des vecteurs de E. Si $u \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ alors $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_p, u) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_p)$.

Autrement dit : si u est une combinaison linéaire de $e_1, e_2, \ldots, e_p$, alors le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_p, u)$ est strictement identique au sous-espace vectoriel engendré par la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$.

Démonstration. À compléter. □

Remarque 2.2.4. C'est faux si le vecteur que l'on souhaite retirer n'est pas combinaison linéaire des autres.

Exemple 2.2.5. $\mathrm{Vect}\Big((1,1), (0,0), (0,1), (2,3)\Big) = \mathrm{Vect}\Big((1,1), (0,1)\Big)$ car $(2,3) = 2(1,1) + (0,1)$ est une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille génératrice.

De manière abstraite : si E est un espace vectoriel, et $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs quelconques de E, alors :

- $\mathrm{Vect}(u, v, u+v) = \mathrm{Vect}(u, v)$
- $\mathrm{Vect}(u, v, 2u-3v) = \mathrm{Vect}(u, v)$
- $\mathrm{Vect}(u, v, 5u) = \mathrm{Vect}(u, v)$

Proposition : Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.

L'ensemble V des solutions d'un système linéaire homogène à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

On trouve une famille génératrice de V en résolvant le système.

Démonstration. À compléter. □

Méthode : Sous-espace vectoriel.

Pour montrer qu'un ensemble V de vecteurs est un espace vectoriel, on pourra essayer de prouver que c'est un sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs et l'écrire sous la forme $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$.

Exemple 2.2.6. Résoudre les systèmes suivants et montrer que leur ensemble de solutions est un espace vectoriel.

1. $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} x + y - z + 2t = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$.

2.3. Familles libres, familles liées.

Définition : Famille liée.

Une famille de vecteurs $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$ de E est dite **liée** ou **linéairement dépendante** s'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ **non tous nuls** tels que

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots \lambda_p e_p = 0.$$

On dit que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots \lambda_p e_p = 0$ est une relation de liaison.

Remarque 2.3.1. On rappelle que les réels $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ ne sont pas tous nuls s'il en existe **au moins un** qui n'est pas nul.

Supposons donc que la famille $\big(e_1, e_2, \cdots, e_p\big)$ est liée et soit λ_i un réel non nul de la famille $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$. Alors on a

$$e_i = \sum_{k\neq i} \frac{-\lambda_k}{\lambda_i} e_i.$$

Réciproquement, si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres, disons

$$e_i = \sum_{k\neq i} \mu_k e_k.$$

Alors

$$\mu_1 e_1 + \cdots \mu_{i-1} e_{i-1} + (-1) e_i + \mu_{i+1} e_{i+1} + \cdots + \mu_p e_p = 0$$

est une relation de liaison.

On constate donc qu'une famille est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Exemple 2.3.2. La famille $\big((1,1),(0,1),(2,3)\big)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ est liée car $(2,3) = 2(1,1) + (0,1)$ est une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille génératrice.

De manière abstraite, dans un espace vectoriel E, si u et v sont deux vecteurs quelconques de E, alors :

- La famille $(u, v, u+v)$ est liée.
- La famille $(u, v, 2u-3v)$ est liée.
- La famille $(u, v, 5u)$ est liée.

Définition : Vecteurs colinéaires.

Deux vecteurs u et v d'un même espace vectoriel E sont dits **colinéaires** si et seulement si il existe un réel α tel que $v = \alpha u$.

Dans ce cas, la famille $\big(u, v\big)$ est liée puisque la relation précédente est une combinaison linéaire avec des réels non tous nuls.

Exemple 2.3.3. Dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $u = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont colinéaires, car : $v = \dfrac{-1}{2} u$ (ou $u = -2v$ ou encore $u + 2v = 0_E$).

Définition : Famille libre.

La famille de vecteurs $\big(e_1, e_2, \cdots, e_p\big)$ est dite **linéairement indépendante** ou **libre** si elle n'est pas liée, c'est-à-dire si toute relation de liaison est nécessairement triviale : dès que l'on écrit

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_p e_p = 0_E$$

alors on a

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0.$$

Autrement dit : la famille de vecteurs $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est libre si, et seulement si, la seule combinaison linéaire possible égale au vecteur nul possède des coefficients tous nuls.

Méthode : Famille libre.

Pour montrer qu'une famille de vecteurs d'un espace vectoriel est une famille libre :

- S'il n'y a qu'un seul vecteur : la famille $\big(u\big)$ est libre si et seulement si le vecteur u n'est pas nul.

- S'il y a deux vecteurs : la famille (u, v) est libre si et seulement si les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires.
- S'il y a plus de deux vecteurs : on résout l'équation
$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0_E,$$
dont les inconnues sont $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ qui donne lieu à la résolution d'un système linéaire. Si on trouve une unique solution donnée par $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$ alors la famille est libre. Sinon elle est liée et la solution que l'on vient de trouver est une relation de liaison.

Remarque 2.3.4. De façon abstraite, soit E est un espace vectoriel et u, v deux vecteurs quelconques de E.

- Si u et v sont libres (c'est-à-dire non colinéaires puisqu'il n'y a que deux vecteurs dans la famille), alors $\mathrm{Vect}(u, v) \neq \mathrm{Vect}(u)$ et $\mathrm{Vect}(u, v) \neq \mathrm{Vect}(v)$. En réalité, $\mathrm{Vect}(u, v)$ contient "une plus grande diversité" de vecteurs que $\mathrm{Vect}(u)$ et $\mathrm{Vect}(v)$.
- Au contraire, si $\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(u)$ ou si $\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(v)$, cela signifie que les vecteurs u et v sont liés, donc colinéaires.

Exercice 2.3.5. **1.** La famille $\big((1, 1, 1), (1, -1, 5)\big)$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$?

2. La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$ est-elle libre dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?

3. La famille $\big(1 + x, x^2 - 2x, 2 + x^2\big)$ est-elle libre dans $\mathbb{R}_2[X]$?

Remarque 2.3.6.

- Toute famille obtenue en enlevant des vecteurs d'une famille libre est encore libre.
- Une famille libre ne contient pas le vecteur nul.

2.4. **Bases d'un espace vectoriel.** Il peut sembler difficile de fabriquer une famille de vecteurs qui soit à la fois libre et génératrice car ce sont des contraintes qui sont opposées : une famille génératrice est plutôt "grosse" et car lui rajouter des vecteurs ne change pas son caractère générateur ; tandis qu'une famille libre est plutôt petite car lui enlever des vecteurs préserve son caractère libre.

En fait, il existe un point d'équilibre entre libre et génératrice, ce type de famille s'appelle une base et nous verrons que le nombre de vecteur qui la compose est uniquement déterminé.

2.4.1. *Définition.*

Définition : Base d'un espace vectoriel.

Une famille $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$ est une **base** de E si et seulement si elle est libre et génératrice.

Bien sûr la difficulté consiste maintenant à montrer que de telles familles existent.

Exemple 2.4.1. Considérons $u = (1, 1)$, $v = (1, 0)$ et $w = (5, 2)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$. La famille (u, v, w) n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$ car elle n'est pas libre : le vecteur w est combinaison linéaire de u et v :
$$w = 2cu + 3v + 0w = 0u + 0v + 1w.$$

Proposition : Coordonnées dans une base.

La famille $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ forme une base de E si, et seulement si tout vecteur u de E se décompose sous forme d'une combinaison linéaire **unique** de $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$, c'est-à-dire qu'il existe un unique p-uplet $\lambda_1 \cdots, \lambda_p$ tels que $u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$. Les nombres $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont alors appelés les **coordonnées** de u dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_p)$.

On peut noter ces coordonnées sous forme de matrice-colonne : $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}$.

Démonstration. À compléter. □

Exemple 2.4.2. La famille $\big((1,1),(1,2)\big)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^2$? Si oui, donner les coordonnées du vecteur $u = (5,6)$ dans cette base.

Méthode : Base d'un espace vectoriel.

Pour montrer qu'une famille $\mathcal{F} = \big(e_1, e_2, \ldots, e_p\big)$ est une base de E :

- on pourra montrer que tout vecteur u de E peut se décomposer comme combinaison linéaire unique de la famille. Cela consistera donc à résoudre le système $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = u$ en montrant qu'il existe un et un seul p-uplet $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ de solutions, à exprimer en fonction de u.
- on pourra montrer que $\mathcal{F}$ est une famille libre et génératrice de E.

Exercice 2.4.3.
1. La famille $\big((1,1,1),(1,-1,5)\big)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
2. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ est-elle une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?

Exercice 2.4.4. Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en déterminer une base :

1. l'ensemble F_1 des suites (u_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$.
2. l'ensemble F_2 des matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $a = 2b$.
3. les matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
4. $F_4 = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x - 2y = 0\big\}$.
5. $F_5 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \text{ tel que } 2P'(1) + P(2) = 0\}$.

Exercice 2.4.5. Déterminer parmi ces ensembles, ceux qui sont des espaces vectoriels, et en donner une base lorsque c'est possible :

1. l'ensemble G_1 des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax+b)e^x$ avec a et b réels.
2. l'ensemble G_2 des matrices $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ avec $a+b+c = 0, d+e+f = 0, g+h+i = 0$.
3. l'ensemble G_4 des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(1) = 0$ et $\int_0^1 P(t)dt = 0$.
4. l'ensemble G_5 des polynômes P de $\mathbb{R}_2[X]$ vérifiant $P(1) = 0$ et $\int_0^1 P(t)dt = 0$.
5. l'ensemble G_6 des polynômes P vérifiant $P'(1) = 2$.

Exercice 2.4.6. La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ? est-elle génératrice de l'espace vectoriel E ? est-elle une base de E ?

1. $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F}$ est constituée des vecteurs : $u = (1,1,1), v = (0,1,-1), w = (2,1,1)$.

2. $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{F}$ est constituée des vecteurs : $P_1(x) = x^2 + x, P_2(x) = x^3, P_3(x) = -x^2 + 1, P_4(x) = x^2$.

3. $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F}$ est constituée des vecteurs : $t = (1,1,1), u = (0,1,-1), v = (2,1,1), w = (1,2,3)$.

4. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}$ est constituée des vecteurs : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrons enfin le résultat suivant sur les tailles possibles des familles libres et génératrices pour qu'elles puissent être des bases.

Théorème : Famille génératrice minimale ou libre maximale.

Soit $\mathcal{F} = \big(e_1, \cdots, e_p\big)$ une famille d'un espace vectoriel E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- La famille $\mathcal{F}$ est génératrice minimale (c'est-à-dire que $\mathcal{F}$ est génératrice, mais, dès qu'on lui retire n'importe lequel de ses vecteurs, la famille obtenue n'est plus génératrice).
- la famille $\mathcal{F}$ est libre maximale (c'est-à-dire que $\mathcal{F}$ est libre mais, dès qu'on lui ajoute n'importe quel vecteur, la famille obtenue n'est plus libre).
- La famille $\mathcal{F}$ est une base.

Démonstration. À compléter. □

Ce théorème illustre bien quelle contrainte il s'agit de réaliser pour fabriquer une base : être une famille génératrice la plus économique possible ou une famille libre la plus complète possible.

2.4.2. *Bases usuelles.* Certaines bases sont les plus simples pour exprimer les vecteurs et servent de bases de référence dans les espaces vectoriels classiques. Elles sont appelées bases usuelles (souvent bases canoniques, même si l'auteur de ce texte déteste cette terminologie).

Théorème : Base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, notons les vecteurs :

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,\ldots,0,0) \\ e_2 &= (0,1,0,\ldots,0,0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0,0,0,\ldots,0,1) \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{C} = \big(e_1, e_2, \ldots, e_n\big)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, appelée **base canonique** de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. On établit facilement que la famille $\mathcal{C} = \big(e_1, e_2, \ldots, e_n\big)$ est libre et génératrice de $\mathbb{R}^n$. □

Exemple 2.4.7. La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\big((1,0),(0,1)\big)$ et celle de $\mathbb{R}^3$ est $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$.

Théorème : Base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, notons les vecteurs :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La famille $\mathcal{C} = \big(E_1, E_2, \dots, E_n\big)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, appelée **base canonique** de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Démonstration. On établit facilement que la famille $\mathcal{C} = \big(E_1, E_2, \dots, E_n\big)$ est libre et génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. □

Exemple 2.4.8. La base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ est formée des vecteurs : $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Théorème : Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, notons E_{ij} la matrice de taille $n \times p$ ayant tous ses coefficients nuls sauf celui en ligne i et colonne j égal à 1.

La famille $\mathcal{C} = \big(E_{11}, E_{12}, \dots, E_{np}\big)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, appelée **base canonique** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Démonstration. On établit facilement que la famille $\mathcal{C} = \big(E_{11}, E_{12}, \dots, E_{np}\big)$ est libre et génératrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. □

Exemple 2.4.9. Donner la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et les coordonnées de $u = \begin{pmatrix}2 & -3\\0 & 5\end{pmatrix}$ dans cette base.

Théorème : Base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n, on note $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$, $e_2(x) = x^2 \cdots, e_n(x) = x^n$.

La famille $\big(e_0, e_1, \dots, e_n\big)$ est une base, appelée **base canonique** de $\mathbb{R}_n[X]$.

Démonstration. À compléter. □

Exemple 2.4.10. Donner la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ puis les coordonnées de $P(x) = x^2 - 1$ dans cette base.

3. Dimension d'un espace vectoriel.

Nous avons déjà constaté que les bases obéissent à des règles strictes : minimiser la taille d'une famille génératrice ou maximiser la taille d'une famille libre. Dans ce paragraphe, on montre encore un peu plus : le nombre de vecteurs qui les constituent dépend uniquement de l'espace vectoriel E.

3.1. Espaces vectoriels de dimension finie.

Définition : Espace vectoriel de dimension finie.

Un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ est dit de **dimension finie** s'il possède une base composée d'un nombre fini de vecteurs.

Exemple 3.1.1.
1. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie car sa base canonique $\big((1,0),(0,1)\big)$ est une famille finie.
2. L'espace vectoriel des suites réelles est de dimension infinie. Une famille génératrice est donnée par les suites $(\delta_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$, $i \in \mathbb{N}$ qui valent 1 pour $n = i$ et 0 sinon.
3. L'espace vectoriel des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est de dimension infinie.

Théorème : Dimension d'un espace vectoriel.

Tout espace vectoriel E non réduit à $\{0\}$ et de dimension finie admet (au moins) une base. De plus, toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs. Ce nombre n est appelé la **dimension** de l'espace vectoriel E et on note $\dim(E) = n$.

Démonstration. À compléter. Attention, c'est une preuve difficile et hors programme, on ne demande pas de savoir la refaire. □

Remarque 3.1.2. Attention, ce résultat ne dit pas que la base d'un espace vectoriel est unique, c'est FAUX. Seul le nombre de ces éléments est uniquement déterminé.

Exemple 3.1.3. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2 car il possède une base ayant 2 vecteurs (sa base canonique, par exemple).

Définition : Cas particuliers, $n = 1$ ou $n = 2$.

Un espace vectoriel de dimension 1 (resp. 2) est appelé **droite** (resp. **plan**) vectoriel(le).

Exemple 3.1.4. Soit $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0 \text{ et } x - y = 0\}$. Montrer que V est un espace vectoriel de dimension finie. Quelle est sa dimension ?

Remarque 3.1.5. Par convention, le seul espace vectoriel de dimension 0 est réduit au vecteur nul : $\dim(E) = 0$ si et seulement si $E = \{0_E\}$. Il s'agit bien d'une convention car l'espace nul n'admet pas de base.

Théorème : Dimension des espaces vectoriels usuels.

- $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension finie, et $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.
- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie, et $\dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) = n$.
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie, et $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = n \times p$.
- $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension finie, et $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$.

Démonstration. Il suffit de considérer les bases canoniques de ces espaces vectoriels. □

3.2. Dimension des sous-espaces vectoriels d'un espace de dimension finie.

Théorème : Sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est lui-même un espace vectoriel de dimension finie, et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.

Démonstration. À compléter. □

Méthode : Base d'un sous-espace vectoriel.

Pour trouver une base d'un sous-espace vectoriel F (et pour montrer que F est bien un sous-espace vectoriel par la même occasion) on pourra essayer d'écrire F sous la forme $F = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$ puis vérifier si la famille $\mathcal{F} = \left(e_1, \ldots, e_p\right)$ est libre :

- si la famille $\mathcal{F}$ est libre, alors il s'agit d'une base du sous-espace vectoriel F et on a $\dim(F) = p$,
- si la famille $\mathcal{F}$ n'est pas libre, c'est donc qu'il existe un vecteur qui est combinaison linéaire des autres. Si on retire ce vecteur, la famille Ffc est encore génératrice. On examine si la nouvelle famille est libre (et ainsi de suite). On aura alors $\dim(F) < p$.

Remarque 3.2.1. De façon abstraite, soit E est un espace vectoriel et u, v deux vecteurs quelconques de E.

- Si u et v sont libres (c'est-à-dire non colinéaires puisqu'il n'y a que deux vecteurs dans la famille), alors $\mathrm{Vect}(u, v)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2.
- Au contraire, si $\dim(\mathrm{Vect}(u, v)) = 1$, cela signifie que les vecteurs u et v sont liés, donc colinéaires.

Exemple 3.2.2. Montrer qu'on a un sous-espace vectoriel et donner une base et la dimension de ce sous-espace vectoriel.

1. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0\}$.

2. $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } x + y + z = 0 \text{ et } x = 0 \right\}$.

3. $H = \mathrm{Vect}(A, B, C)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Théorème : Sous-espaces vectoriels de mêmes dimensions.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Si $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$, alors $F = G$.

Démonstration. À compléter. □

Remarque 3.2.3. En particulier, si F est un sous-espace vectoriel de E et $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$.

Exemple 3.2.4. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, considérons les sous-espaces vectoriels $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ et $G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 12 & -5 \end{pmatrix} \right)$. Montrer que $F = G$.

3.3. Rang d'une famille de vecteurs.

Définition : Rang d'une famille de vecteurs.

Soit une famille de vecteurs $\mathcal{F} = \big(e_1, e_2, \ldots, e_p\big)$. On appelle **rang** de cette famille, et on note $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$ la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \cdots, e_p)$ engendré par la famille $\mathcal{F}$.

Remarque 3.3.1. Si $\mathcal{F} = \big(e_1, e_2, \ldots, e_p\big)$, alors $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leqslant p$, avec égalité si, et seulement si, la famille $\mathcal{F}$ est libre. En d'autre termes, le rang d'une famille libre est égale au nombre de vecteurs de cette famille.

Méthode : Rang d'une famille de vecteurs.

Pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs $\mathcal{F} = \big(e_1, e_2, \ldots, e_p\big)$, on examine si cette famille est libre :

- si elle est libre, alors c'est une base du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ donc $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = p$.
- si elle n'est pas libre, on retire un vecteur (qui est combinaison linéaire des autres) et on examine si la nouvelle famille est libre, et ainsi de suite. On aura $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) < p$.

Exemple 3.3.2. Déterminer le rang de la famille $\big((1, 1, 1, 1), (0, -1, 1, 2), (-1, 0, 3, -2), (2, 2, 2, 2)\big)$ dans $\mathbb{R}^4$.

Définition : Rang d'une matrice.

Le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est le rang de la famille de ses vecteurs-colonnes.
On a : $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^tA)$.

Remarque 3.3.3. Admettons que $\text{rg}(A) = \text{rg}\left({}^tA\right)$ (c'est un théorème hors programme). Cela signifie que le rang de la matrice A est également égal au rang de la famille de ses vecteurs lignes.

Exemple 3.3.4. Donner le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Théorème : Familles de vecteurs d'un espace de dimension connue.

Soit E un espace vectoriel de dimension n.

1. **a.** Toute famille **libre** possède **au plus** n vecteurs.
   b. Toute famille libre de n vecteurs est une base.
   c. Toute famille de p vecteurs avec $p > n$ est liée
2. **a.** Toute famille **génératrice** possède **au moins** n vecteurs.
   b. Toute famille génératrice de n vecteurs est une base.
   c. Toute famille de p vecteurs avec $p < n$ n'est pas génératrice.

Démonstration. Il s'agit d'une reformulation du théorème 2.4.1. □

Remarque 3.3.5. Autrement dit, le rang d'une famille de vecteurs est inférieur ou égal à la dimension de l'espace vectoriel. S'il est égal, il s'agit d'une base.

Méthode : Base d'un espace vectoriel.

- Pour montrer qu'une famille de n vecteurs est une base d'un espace vectoriel E de dimension n **connue**, il suffit de prouver que cette famille est libre **ou** génératrice. En pratique, prouver qu'elle est libre est plus simple.

Exemple 3.3.6. **1.** Dans $\mathbb{R}^3$, on note $e_1 = (1, 2, -1)$ et $e_2 = (0, 1, 4)$. Que peut-on dire concernant la famille $\left(e_1, e_2\right)$?

2. La famille $\left(P_1, P_2, P_3\right)$ avec $P_1(x) = x$, $P_2(x) = 1 + x$, $P_3(x) = 1 - x^2$ est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

4. Sujets d'annales en lien avec ce chapitre.

Remarque 4.0.1. Ce chapitre est le premier d'une série de trois consacrés à l'algèbre linéaire. Les sujets d'annales utilisent presque systématiquement le contenu de ces trois chapitres (parfois seulement les deux premiers mais rarement). Nous ne pourrons commencer à travailler ces annales qu'après avoir étudié le deuxième chapitre sur les applications linéaires.